

# 基于稀疏补分析模型的 近似最优子空间追踪

张宗念<sup>1</sup>, 李金徽<sup>2</sup>, 黄仁泰<sup>3</sup>, 闫敬文<sup>4</sup>

(1. 东莞理工学院电子工程学院, 广东东莞 523808; 2. 东莞理工学院网络中心, 广东东莞 523808;  
3. 东莞理工学院计算机学院, 广东东莞 523808; 4. 汕头大学电子工程系, 广东汕头 515063)

**摘要:** 为了从含噪声的测量矢量中重构原始信号, 研究了稀疏补分析模型下近似最优子空间追踪信号重构算法. 针对直接采用稀疏综合模型下子空间追踪过程非最速梯度下降和信号重构概率不高的缺点, 根据稀疏补分析模型下不同类型分析字典的结构特点来设计近似目标优化函数; 改进了迭代追踪过程; 优化了稀疏补取值方法; 提出并实现了基于稀疏补分析模型的近似最优子空间追踪算法. 仿真实验证明, 当稀疏补运算符分别采用随机紧支框架和二维全变分矩阵时, 算法的完全重构信号概率均明显高于 ASP、AHTP、AIHT、AL1、GAP 算法的完全重构信号概率; 对于含高斯噪声的输入信号, 算法的重构信号综合平均 PSNR 比相应的 ASP、AHTP、AIHT 算法分别提高了 0.8 dB、1.38 dB、3.13 dB, 但比 GAP 和 AL1 算法降低了 0.32 dB 和 0.6 dB. 算法的完全重构概率与综合重构性能有了明显提高, 收敛充分条件得到进一步简化.

**关键词:** 稀疏补分析模型; 近似最优; 子空间; 追踪

**中图分类号:** TN911.72

**文献标识码:** A

**文章编号:** 0372-2112 (2016)10-2289-05

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2016.10.001

## Approximately Optimal Subspace Pursuit Based on Cosparse Analysis Model

ZHANG Zong-nian<sup>1</sup>, LI Jin-hui<sup>2</sup>, HUANG Ren-tai<sup>3</sup>, YAN Jing-wen<sup>4</sup>

(1. Department of Electronic Engineering, Dongguan University of Technology, Dongguan, Guangdong 523808, China;

2. Network Center, Dongguan University of Technology, Dongguan, Guangdong 523808, China;

3. Department of Computer Science, Dongguan University of Technology, Dongguan, Guangdong 523808, China;

4. Department of Electronics Engineering, Shantou University, Shantou, Guangdong 515063, China)

**Abstract:** An approximately optimal subspace pursuit algorithm under cosparse analysis model was studied to reconstruct the original signal from the noisy measurement vectors. To overcome the drawbacks of the non steepest gradient during the pursuit process and the low successful reconstruction probability for sparse synthesis model, an approximately optimal subspace pursuit algorithm based on cosparse analysis model was presented and realized. The approximately optimal optimization object function for the algorithm was designed according to the structure of the different analysis dictionaries, the iterative pursuit process of the algorithm was revised, and the methods of selecting cosparsity was optimized. The simulation experiments show that the complete reconstruction probability of the new algorithm is evidently larger than that of the algorithm for ASP, AHTP, AIHT, AL1 and GAP when the cosparse operator is a random compact frame or a two dimension total variant matrix. The comprehensive average PSNR of the output signal for the new algorithm is larger than that of the algorithm of ASP, AHTP, and AIHT for 0.8 dB, 1.38 dB and 3.13 dB respectively and is less than that of the algorithm of GAP and AL1 for 0.32 dB and 0.6 dB when the input signal is with Gaussian noise. The complete reconstruction probability of the new algorithm was greatly improved by adopting the above measures, and the convergence condition for the new algorithm was simplified.

**Key words:** cosparse analysis model; approximately optimal; subspace; pursuit

## 1 引言

近年来,对压缩感知信号处理的研究一直十分活跃,其中一类约束优化问题是:从一组含有噪声的测量矢量  $y = Mx + e$  中重构原始信号矢量  $x \in \mathbf{R}^d$ ,其中测量矩阵  $M \in \mathbf{R}^{m \times d}$  (通常  $m < d$ ) 已知,  $e$  为加性有界噪声. 此方程有无穷个解,要找到唯一解,需要知道  $x$  的部分先验知识,如假设它是稀疏的. 该假设将导致两种信号表示模型,即稀疏综合模型与稀疏补分析模型<sup>[1]</sup>,两种模型下的信号重构方法是不同的. 在稀疏综合模型下,通常假定  $x$  在给定字典  $D \in \mathbf{R}^{d \times n}$  ( $d \leq n$ ) 下的表示系数  $\alpha \in \mathbf{R}^n$  是  $k$  稀疏的,即  $x = D\alpha$ ,且  $\|\alpha\|_0 = k$ ,则重构  $x$  可通过求解  $\arg \min \|\alpha\|_0$ ,约束条件  $\|y - MD\alpha\|_2 \leq \varepsilon$ ,即先求  $\alpha$  再重构出  $x = D\alpha$ . 此模型一般要求字典  $D$  的列向量之间不允许有相关性.

稀疏补分析模型基本内容:如果  $x$  在已知分析字典  $\Omega \in \mathbf{R}^{p \times d}$  下的分析表示矢量为  $\Omega x$  且其中有  $l = p - \|\Omega x\|_0$  个零元素,则称  $x$  是  $l$  稀疏补的 ( $\Omega$  与  $M$  结构不同,通常  $p > d$ ). 该模型把焦点集中到分析表示矢量  $\Omega x$  的零元素而不是非零元素上. 重构  $x$  变成可通过求解优化方程  $\hat{x}_l = \arg \min \|\Omega x\|_0$  并满足约束条件  $\|y - Mx\|_2 \leq \varepsilon$ . 求解此方程,同样要用近似法. 两种模型下信号重构的主要区别是:在稀疏综合模型下寻找最接近的  $k$  个稀疏矢量的支撑集可以通过简单地选取  $\alpha$  中  $k$  个最大元素的支撑集来实现;而在稀疏补分析模型下寻找与原始信号最接近的  $l$  个稀疏矢量是一个复合问题,不能直接选取  $\Omega x$  中  $l$  个最小元素的支撑集作为最终解,因为此解不一定是最优解.

近十年来,国内外学者对稀疏综合模型下信号重构及其应用进行了深入研究,也取得了一系列成果<sup>[2-7]</sup>,但是对稀疏补分析模型下信号优化研究还是近几年的事情,目前国内还没有这方面的文献报道. 稀疏补分析模型下直接求解优化方程是一个 NP-hard 问题,故只能求近似最优解,方法有两类:一是采用分析  $l_1$  范数法<sup>[9-10]</sup> (Analysis  $l_1$  Norm, AL1),该算法的完全重构概率很高、重构性能很好,但是算法计算量巨大、收敛速度慢. 二是采用各种贪婪追踪策略,如: S. Nam 在 2013 年提出贪婪分析追踪算法 (Greedy analysis pursuit, GAP)<sup>[11]</sup>,从一个满支撑集补开始追踪,每一次迭代去掉其中的一个元素,直到迭代满足终止条件为止,最后一次迭代的支撑集补就是最终解. 此算法可以获得与 AL1 相当的重构性能,其不足之处是迭代需要遍历整个支撑集、计算量大、收敛速度也慢. 2011 年 R. Giryes 提出分析迭代硬阈值算法 (Analysis Iterative Hard Thresholding, AIHT)<sup>[12]</sup> 把稀疏综合模型下的硬阈值跟踪<sup>[13]</sup> 直接搬到稀疏补分析模型中来,也取得了不错的信号重

构效果,但是没有考虑稀疏补分析模型下分析字典  $\Omega$  和分析表示矢量  $\Omega x$  的结构特点等问题,虽然收敛速度大大加快,但重构概率和重构性能较差. 2012 年 R. Giryes 把稀疏综合模型下硬阈值追踪<sup>[14]</sup> 思想与 AIHT 算法相结合提出了稀疏补分析模型下的分析硬阈值追踪重构算法 (AHTP)<sup>[15]</sup>,与前几种算法相比,信号重构性能和收敛速度都有一定提升,但是并没有分析  $\Omega$  的结构特点对算法性能的影响及算法收敛的保证条件等. 2012 年 R. Giryes 把稀疏综合模型下子空间追踪<sup>[16-17]</sup> 类推到稀疏补分析模型中,提出分析子空间追踪 (Analysis Subspace Pursuit, ASP)<sup>[18]</sup>,与 AIHT、AHTP 做了对比,重构性能有一定提高,并给出了保证算法收敛的充分条件、重构误差上界. 本文在 ASP 的基础上,根据不同分析字典的结构特点用近似目标优化函数取代原目标优化函数,改进了算法的迭代追踪步骤,对稀疏补的取值方法进行优化,提出了基于稀疏补分析模型的近似最优分析子空间追踪 (Approximate Optimal Analysis Subspace Pursuit based on Cosparsity Analysis Model, AOASP),进一步提高了算法的完全重构概率和重构性能,并通过仿真实验证实了算法可行性.

## 2 稀疏补分析模型

对于给定矢量  $x \in \mathbf{R}^d$  和分析字典  $\Omega \in \mathbf{R}^{p \times d}$ ,用  $\Lambda = \text{cosupp}(\Omega x)$  表示  $\Omega x$  中  $l$  个零元素构成的支撑集补;  $r = \text{rank}(\Omega_\Lambda)$  称为  $x$  的秩补. 因  $\Omega x$  中每个零元素对应正交  $x$  的一个子空间,故所有与行向量  $w_j \in \Omega^T$  正交的零空间表示为,或  $W_\Lambda = \text{span}(w_j, j \in \Lambda)^\perp$ ,即  $\Lambda$  上的行向量张成的子空间的正交补空间. 故信号  $x$  属于  $d-l$  维的所有  $C_l^d$  个可能子空间的并,即  $x \in \cup_{\Lambda: |\Lambda|=l} W_\Lambda$ <sup>[19]</sup>.

相关符号定义如下:  $\text{cosupp}(\Omega x, l)$  表示取  $\Omega x$  中  $l$  个最小元素构成的索引集;  $\text{range}(\Omega_\Lambda^T)$  表示矩阵  $\Omega_\Lambda^T$  的列空间;  $\Omega_\Lambda^\dagger$  是  $\Omega_\Lambda$  的伪逆矩阵.  $Q_\Lambda = I - \Omega_\Lambda^\dagger \Omega_\Lambda$  表示在矩阵值域  $\text{range}(\Omega_\Lambda^T)$  的正交补上的正交投影. 整数集  $[p] = \{1, 2, \dots, p\}$ ;  $L_l = \{\Lambda: |\Lambda| \geq l, \Lambda \subset [p]\}$  是稀疏补大于或等于  $l$  的所有支撑集补的集合;  $L_r^{\text{CORANK}} = \{\Lambda: \text{rank}(\Omega_\Lambda) \geq r, \Lambda \subset [p]\}$  是秩补大于等于  $r$  的所有支撑集补的集合.  $A_l = \cup_{\Lambda \in L_l} W_\Lambda$  是在  $\Lambda$  上的稀疏补矢量张成子空间的并. 矩阵  $M$  的最大奇异值为  $\sigma_M$ . 下文中“ $\Omega$  处于通常位置”是指  $\Omega \in \mathbf{R}^{p \times d}$  中任意  $d$  个行向量之间都是线性独立的. “完全重构信号  $x$ ”是指完全重构  $x$  的真实支撑集补  $\Lambda$ .

对于任意矢量  $x \in \mathbf{R}^d$ ,若下式成立,则称  $P_{\Omega, l}$  为到  $l$  稀疏补子空间的近似最优投影.  $\|x - P_{\Omega, l} x\|_2 \leq C_l \min_{\tilde{\Lambda} \in \text{cosparsity}} \|\tilde{x} - x\|_2$ , 常数  $C_l \geq 1$ . 以下算法取  $P_{\Omega, l} x = Q_\Lambda x$  和  $\Lambda = \text{cosupp}(\Omega x, l)$ .

**定理 1** 对于任意  $x \in A_l, \delta_l$  如果满足下式  $(1 - \delta_l) \|x\|_2 \leq \|Mx\|_2 \leq (1 + \delta_l) \|x\|_2$ , 则矩阵  $M$  具有常数  $\delta_l$  的  $\Omega$ -RIP 特性<sup>[15]</sup>.

**定理 2** 如果矩阵  $M$  满足  $\delta_l$  的  $\Omega$ -RIP 特性, 则有  $\|MQ_A\|_2 \leq (1 + \delta_l)$ <sup>[15]</sup>.

**定理 3** 对于任意  $\Lambda \in L_l$ , 当且仅当  $\|Q_A((I - M^*M)Q_A)\|_2 \leq \delta_l$  时, 矩阵  $M$  满足  $\Omega$ -RIP 特性<sup>[15]</sup>.

### 3 近似最优分析子空间追踪算法

#### 3.1 AOASP 算法介绍

信号  $x$  在分析字典  $\Omega$  下的稀疏补为  $l$ , 测量矢量  $y = Mx + e$ ,  $e$  为加性噪声, 求稀疏度补为  $l$  的信号估计值  $\hat{x}_{AOASP}$ , 算法实现步骤如下:

步骤 1, 初始化信号估计值  $\hat{x}^0 = 0$  和迭代次数  $i = 0$ ; 并输入  $M, \Omega, l; \Lambda^0 = \{i, 1 \leq i \leq p\}$ , 余差  $y_{resi}^0 = y$ ;

步骤 2, 开始循环迭代  $i = i + 1$ ;

步骤 3: 计算新的支撑集补元素  $\Lambda_{new} = \text{cosupp}(\Omega M^* y_{resi}^{i-1}, l)$ ;

步骤 4, 更新支撑集补  $\tilde{\Lambda}^i = \Lambda^{i-1} \cap \Lambda_{new}$ ;

步骤 5, 计算信号的暂时估计值  $x_{temp} = \arg \min \|y - M\tilde{x}\|_2$ , 约束  $\Omega_{\tilde{\Lambda}} \tilde{x} = 0$ ; 可用求下式的解来近似  $x_{temp} = \arg \min (\|y - M\tilde{x}\|_2 + \lambda_1 \|\Omega_{\tilde{\Lambda}} \tilde{x}\|_2)$ .

步骤 6, 扩充支撑集补  $\Lambda^i = \text{cosupp}(\Omega_{\Lambda_{temp}}, l)$ ;

步骤 7, 重新计算信号的估计值  $\arg \min \|y - M\tilde{x}\|_2$ , 约束  $\Omega_{\tilde{\Lambda}} \tilde{x} = 0$ ; 可用求  $x_{AOASP}^i = P_{\Omega, l} x = Q_{\Lambda^i} x_2$  的解来代替, 即求近似最优投影.

步骤 8, 更新余差  $y_{resi}^i = y - M\hat{x}_{AOASP}^i$ ;

步骤 9, 判断中止条件是否满足? 不满足, 转到循环开始处; 终止条件为  $\|\hat{x}_{AOASP}^i - \hat{x}_{AOASP}^{i-1}\|_2 \leq C_{Term} \|e\|_2$ ; 若满足中止条件, 则循环迭代结束, 并给出最终估计解  $\hat{x}_{ASP} = \hat{x}_{ASP}^i$ .

#### 3.2 AOASP 算法性能分析

##### 3.2.1 算法稳定重构条件

**定理 4** AOASP 算法稳定重构条件. 如果存在常数  $\gamma > 0$ , 使得如下两公式成立  $(1 + C_S)(1 - (C_S/(1 + \gamma)^2 - (C_S - 1)\sigma_M^2)) < 1, \delta_{4l-3p} \leq \delta_2(C_S, \sigma_M^2, \gamma)$ , 则原始信号与经过  $i$  次迭代后的重构信号  $\hat{x}^i$  之间的误差满足  $\|x - \hat{x}^i\|_2 \leq C\|e\|_2$ . 其中  $C_S = \max(C_l, C_{2l-p}), \delta_2(C_S, \sigma_M^2, \gamma)$  是大于零的常数<sup>[15]</sup>; 迭代次数

$$i = \lceil \log(\|x\|_2/\|e\|_2) / \log(1/\tau\rho_1\rho_2) \rceil,$$

$$C = 1 + ((1 - \tau\rho_1\rho_2)^i / (1 - \tau\rho_1\rho_2)) (\tau(\eta_1 + \rho_1\eta_2) + 2(1 - \delta_{2l-p})),$$

$$\tau = (1 + \delta_{2l-p}) / (1 - \delta_{2l-p}), \eta_1 \triangleq \sqrt{1 + \delta_{3l-2p}}(1 + \sqrt{C_l})$$

$$(1 - \delta_{4l-3p}), \eta_2 \triangleq (i_1 + i_2 + i_3), i_1 = (1 + \delta_{3l-2p})(\gamma(1 + \alpha)),$$

$$i_2 = C_{2l-p}(1 + \delta_{3l-2p}) / (\gamma(1 + \gamma)(1 + \alpha)),$$

$$i_3 = \sigma_M^2(C_{2l-p} - 1) / (\gamma(1 + \gamma)(1 + \alpha)),$$

$$\alpha \triangleq \sqrt{\delta_{4l-3p}} / ((1 - \sqrt{\delta_{2l-p}})\alpha_1 - \sqrt{\delta_{4l-3p}}),$$

$$\alpha_1 = \sqrt{C_{2l-p}} / ((1 + \gamma_1)(1 + \gamma_2)),$$

$$\rho_1^2 \triangleq (1 + 2\delta_{4l-3p}\sqrt{C_l} + C_l) / (1 - \delta_{4l-3p}^2),$$

$$\rho_2^2 \triangleq 1 - (\sqrt{\delta_{4l-3p}} - \sqrt{C_3 - C_4})^2, \text{ 且 } \rho_1^2\rho_2^2 < 1,$$

$$C_3 = C_{2l-p}(1 - \sqrt{\delta_{2l-p}})^2 / (1 + \gamma)^2,$$

$$C_4 = (C_{2l-p} - 1)(1 + \delta_{2l-p})\sigma_M^2.$$

定理中各常数的选择. 若  $\Omega$  为酉矩阵, 则取  $\delta_{4l-3p} < \delta_2(C_l, \sigma_M^2) = 0.0156$ . 若  $\Omega$  为非酉矩阵, 如均值为零方差为  $1/\sqrt{d}$  的随机高斯矩阵, 则  $\sigma_M$  的取值可以用  $1 + \sqrt{d/m}$  来近似, 如  $d/m = 1.5$ , 可以得到经验值  $\sigma_M^2 \approx 5$ , 此时需要保证  $C_S \leq 1.118$ , 这对于近似最优投影的质量十分重要. 若  $C_l = C_S = 1.05$ , 则常数  $\delta_{4l-3p} \leq 0.0049$ <sup>[15]</sup>. 若  $C_l = C_S = 1.1$ , 则常数  $\delta_{4l-3p} \leq 0.00032$ .

**定理 5** 给定随机矩阵  $M \in \mathbb{R}^{m \times d}$ , 对于任意  $z \in \mathbb{R}^d$ , 常数  $C_M > 0, \varepsilon_l > 0$ , 如果  $m \geq 32((p-l)\log(9p/(\varepsilon_l(p))) + t) / (C_M\varepsilon_l^2)$  成立, 则  $\delta_l \leq \varepsilon_l$  将以大于  $1 - e^{-t}$  的概率成立.

对于  $\Omega$  处于通用位置时, 通常要求  $l < d, m < d, p < 2d$ .  $\Omega$  越大, 其行向量之间的线性相关性越强, 此时稀疏补  $l$  可能大于  $d$ . 这也说明了  $\Omega$  内向量之间具有线性相关性是有益的.

##### 3.2.2 稀疏补 $l$ 选取方法

$l$  取值决定算法的投影步骤. 在稀疏综合模型中, 过渡估计稀疏度对算法性能是有益的. 类似地, 在稀疏补分析模型中, 欠估计稀疏补  $l$  对算法性能是有益的. 根据文献 11 命题 3, 为了从  $y = Mx$  和  $\Omega_{\tilde{\Lambda}} x = 0$  中重构  $x$ , 确定  $\tilde{\Lambda}$  的充分条件是  $\kappa_{\Omega}(\tilde{l}) \leq m/2$ , 其中  $\tilde{\Lambda}$  是  $\Lambda$  的子集,  $\tilde{l} = |\tilde{\Lambda}| < l = |\Lambda|; \kappa_{\Omega}(\tilde{l}) = \max_{\Lambda \in \tilde{\Lambda}}(\dim(W_{\Lambda}))$  为  $\tilde{l}$  的函数.  $\tilde{l}$  的两种取法: 一是  $\Omega$  处于通用位置时,  $\kappa_{\Omega}(\{\tilde{l}\}) = \{\max(d, 0)\}$ , 可选取  $\tilde{l} = \min(d - m/2, l)$ . 二是在图像处理领域使用有限差分分析运算符  $\Omega_{DF}$  计算图像水平和垂直方向的离散差分, 即求变分范数最小化. 此时  $\kappa_{\Omega}(\tilde{l}) \geq d - l/2 - \sqrt{l/2} - 1$ , 取  $\tilde{l} = \lceil \min((\sqrt{2d - m - 1.5} - 1/\sqrt{2}), l) \rceil$ . 所以当分析运算符  $\Omega$  处于通用位置时, 算法使用真正的稀疏度补  $l$ ; 当分析运算符为  $\Omega_{DF}$  时, 算法使用  $\tilde{l}$  代替  $l$ , 且倾向于取较大的值. 在无噪声情况, 可以用较小的  $\tilde{l}$  代替  $l$ ; 有噪声时,  $l$  取值较大时去噪效果会更好些.

### 4 仿真实验

实验一, 测试算法的完全重构概率. 稀疏补运算符

$\Omega$ 采用随机紧支框架,测量矩阵  $M$  采用独立同分布构成的随机矩阵.  $\delta = m/d$  表示亚取样率,  $\rho = (d-l)/m$  表示稀疏补与测量矢量数目的比值,也是  $\text{Null}(\Omega_A)$  的维数与测量数目的比值,  $\rho$  与  $\delta$  的关系曲线称为相位过渡图. 实验中  $m$  和  $l$  分别取 20 组不同值,即对应  $\rho$  和  $\delta$  分别取不同的值,针对每一种取值组合,重复实验 40 次,测试各算法完全重构信号的概率. 实验结果见图 1, 曲线下方表示对于  $\rho$  和  $\delta$  不同取值,算法以 100% 的概率完全重构信号的情形,上方表示不能完全重构信号的情形. 分析图中曲线可知, AOASP 算法的信号完全重构概率明显高于 ASP、AHTP、AIHT、GAP 和 ALI 五种算法的完全重构概率. 另外,曲线也说明了分析运算符  $\Omega$  的冗余度越高,即  $\Omega$  内向量的线性相关性越强,重构算法的性能越好.

实验二,测试算法的完全重构概率. 稀疏补运算符  $\Omega$  采用有限差分分析运算符  $\Omega_{diff}$ ,其它参数取值同实验一. 实验结果仍然用相位过渡图表示,见图 2. 从图中可以看出, AOASP 的信号完全重构概率明显高于 ASP、AHTP、AIHT 的信号完全重构概率.

实验三,测试了 AOASP 算法在含噪声情形下重构信号的性能. 目标稀疏补信号  $x$  由高斯随机向量与  $\text{Null}(\Omega_A)$  的列向量的乘积构成. 这里  $M$  和  $\Omega$  分别采用独立同分布的随机矩阵和随机紧支框架,矩阵元素均从独立高斯分布中抽取. 噪声选用均值为零、方差为  $1E-6$  的高斯噪声. 选取  $d = 200, p = 240, m = 160, l = 144$ , 为了测试算法对不同噪声等级的重构性能,可以通过改变输入噪声等级测试重构信号的信噪比,分别进行实验 40 次,计算出输出与输入的综合平峰值均信噪比. 输出峰值信噪比 (PSNR) 定义为  $20\log_{10}(\|x\|_2/\|\hat{x} - x\|_2)$ , 输入峰值信噪比定义为  $20\log_{10}(\|x\|_2/\|e\|_2)$ . 实验结果是 AOASP、ASP、AHTP、AIHT、GAP 和 ALI 算法的综合平均输出峰值信噪比分别为 25.73dB、24.93 dB、24.35dB、22.60dB、26.05dB、26.33dB; AOASP 比 ASP、AHTP、AIHT 算法的综合平均 PSNR 分别提高了 0.8dB、1.38dB、3.13dB, 比 GAP 和 ALI 算法的平均 PSNR 低 0.32dB、0.6dB, 而算法的计算复杂度低于 GAP 和 ALI 的计算复杂度. 用曲线表示于图 3. 算法的综合重构性能有了明显提高.

## 5 结论

通过对压缩感知信号优化问题中的稀疏补分析模型理论的研究,针对直接采用稀疏综合模型下子空间追踪过程非最速梯度下降和信号重构概率不高的缺点,引入稀疏补投影思想,根据稀疏补分析模型下分析字典的不同结构特点来设计近似目标优化函数,修正了迭代追踪过程,优化了稀疏补取值方法,设计并实现

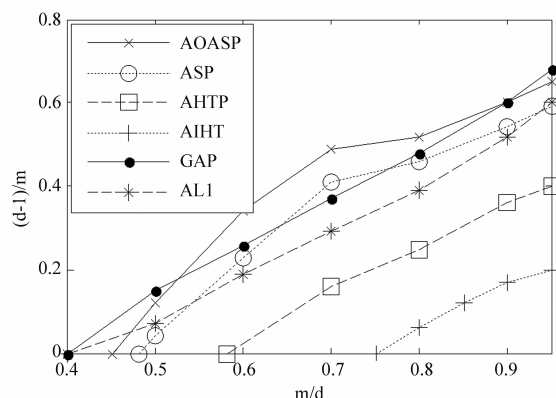


图1 相位过渡图( $\Omega$ 为随机紧支框架)

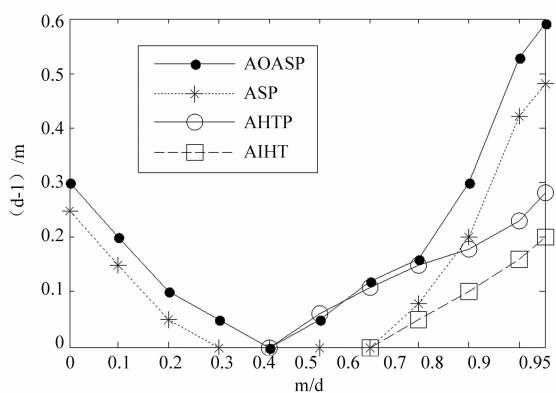


图2 相位过渡图( $\Omega$ 为有限差分运算符)

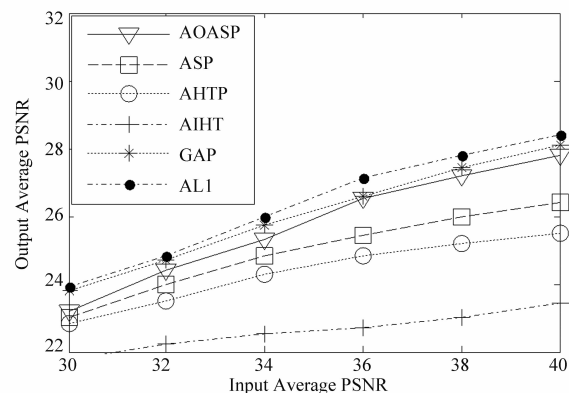


图3 输出与输入平均信噪比关系

了基于稀疏补分析模型的近似最优分析子空间追踪算法,进一步提高了算法的完全重构概率,提高了算法的信号重构性能,通过仿真实验验证了算法是可行的. 如何选择不同类型的分析字典  $\Omega$  才能找到目标函数的近似最优解等需进一步研究.

## 参考文献

- [1] Elad M, Milanfar P, Rubinstein R. Analysis versus synthesis in signal priors [J]. *Inverse Problems*, 2007, 23 (3): 947-968.

- [2] Candes E J, Elad Y C, Needel D. Compressed sensing with coherent and redundant dictionaries[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis. 2011, 31(1):59-73.
- [3] Rauhut H, Schnass K, Vanderheyne P. Compressed sensing and redundant dictionaries[J]. IEEE Trans. Inf. Theory. 2008, 54(5):2210-2219.
- [4] Candes E J, Tao T. Near-optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies? [J]. IEEE Trans. On Inf. Theory, 2006, 52(12):5406-5425.
- [5] 张宗念, 黄仁泰, 闫敬文. 压缩感知盲稀疏度重构算法[J]. 电子学报, 2011, 39(1):18-21.  
Zhang Zong-nian, Huang Ren-tai, Yan Jing-wen. A Blind Sparsity Reconstruction Algorithm for Compressed Sensing Signal[J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(1):18-21. (in Chinese)
- [6] 练秋生, 陈书贞. 基于解析轮廓波变换的图像稀疏表示及其在压缩传感中的应用[J]. 电子学报, 2010, 38(6):1-6.  
Lian Qiu-sheng, Chen Shu-zhen. Sparse image representation using the analytic contourlet transform and its application on compressed sensing [J]. Acta Electronica Sinica, 2010, 38(6):1-6. (in Chinese)
- [7] Foucart S. Sparse recovery algorithms: sufficient conditions in terms of restricted isometry constants [C]. Approximation Theory XIII, Springer Proceedings in Mathematics, 2010, 65-77.
- [8] Garg R, Khandekar R. Gradient descent with sparsification: an iterative algorithm for sparse recovery with restricted isometry property [A]. Proceedings of the 26th Annual International Conference on Machine Learning, ICML '09 [C]. ACM, New York, NY, USA, 2009, 337-344.
- [9] Cai J, Osher S, Shen Z. Split bregman methods and frame based image restoration [J]. Multiscale Modeling & Simulation, 2009, 8(2):337-369.
- [10] Dai W, Milenkovic O. Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2009, 55(5):2230-2249.
- [11] Nam S, Davis M, Elad M, et al. The cosparsity analysis model and algorithms [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis. 2013, 34(1):30-56.
- [12] Giryes R, Nam S, Gribonval R. Iterative cosparsity projection algorithms for the recovery of cosparsity vectors [A]. The 19th European Signal Processing Conference (EUSIPCO-2011) [C], Barcelona, Spain, 2011.
- [13] Blumensath T, Davis M. Iterative hard thresholding for compressed sensing [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2009, 27(3):265-274.
- [14] Foucart S. Hard thresholding pursuit: an algorithm for compressive sensing [J]. SIAM J. Numer. Anal. 2011, 49(6):2543-2563.
- [15] Giryes R, Nam S, Elad M. Greedy-like algorithm for the cosparsity analysis model [J]. Special Issue in LAA on Sparse Approximate solution of Linear Systems. 2012, (7).
- [16] Lu Y M, Do M N. A theory for sampling signals from a union of subspaces [J]. IEEE Trans. Signal Process., 2008, 56(6):2334-2345.
- [17] Blumensath T, Davies E. Sampling theorems for signals from the union of finite-dimensional linear subspaces [J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2009, 55(4):1872-1882.
- [18] Giryes R, Nam S, Elad M. CoSamp and SP for the cosparsity analysis model [A]. 20th European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2012) [C]. Bucharest, Romania, Aug, 2012. 26-31.
- [19] Nam S, Davis M, Elad M, et al. Cosparsity analysis modeling [A]. The 9th International Conference on Sampling Theory and Applications (sampta-2011) [C]. Singapore, 2011.

#### 作者简介



张宗念 男, 1963年6月生于河北深州, 副教授. 2000年获华南理工大学博士学位. 主要研究方向为压缩感知理论与应用、图像处理.

E-mail: zzn99@sohu.com



李金徽 男, 1980年4月生于辽宁沈阳, 工程师. 2004年获重庆工商大学学士学位. 主要研究方向为分布式计算机网络.

E-mail: li@dgut.edu.cn



黄仁泰 男, 1964年12月生于广东东莞, 副教授. 2006年获华中科技大学硕士学位. 主要研究方向为分布式计算机网络.

E-mail: huangrt@dgut.edu.cn



闫敬文 男, 1964年7月生于吉林磐石, 博士, 教授, 博士生导师. 1997获中国科学院长春光机所博士学位. 主要研究方向为图像处理和分折、遥感图像处理等.

E-mail: jwyan@stu.edu.cn